



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

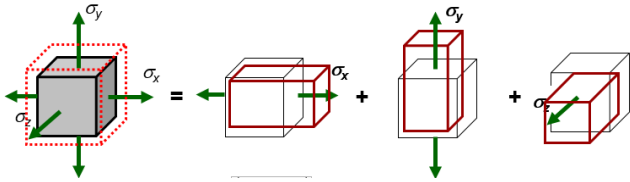


Metoda elementów skończonych (MES1)

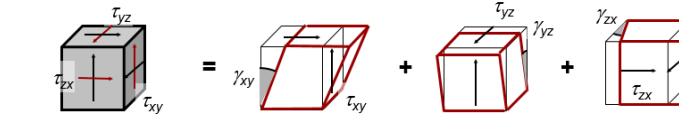
Część 3A. Przypadek dwuwymiarowy (2D)

03.2024

Postać prawa Hooke'a dla materiału izotropowego w stanie trójwymiarowym



$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}$$

E - moduł Younga
 ν - stała Poissona
 G - moduł Kirchhoffa

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

wektor składowych naprężenia:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}_{6 \times 1}$$

wektor składowych odkształcenia:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

$6 \times 1 \quad 6 \times 6 \quad 6 \times 1$

macierz konstytutywna:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

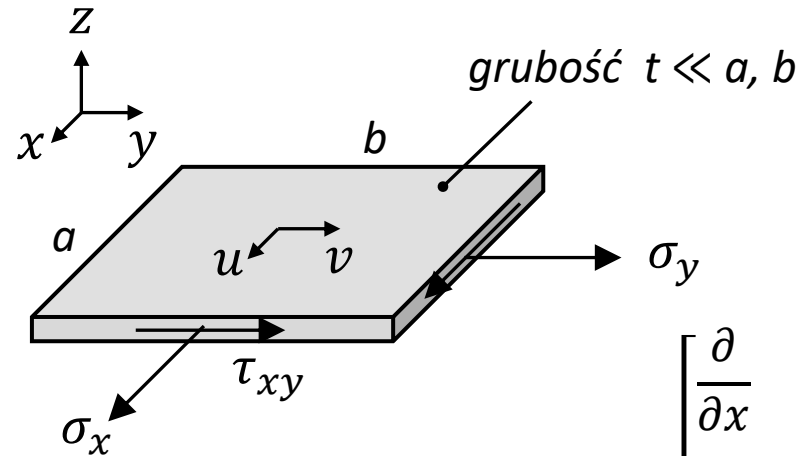
Płaski stan naprężenia (cienkie płyty i powłoki)

$$\sigma_x ; \sigma_y ; \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} ; \tau_{yz} = 0 ; \tau_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_x ; \varepsilon_y ; \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} ; \gamma_{yz} = 0 ; \gamma_{zx} = 0$$



wektor przemieszczenia:

$$[u] = [u, v]$$

1×2

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

3×2

macierz gradientu

$$\{\varepsilon\} = [R]\{u\}$$

$3 \times 1 \quad 3 \times 2 \quad 2 \times 1$

wektor składowych odkształcenia:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]$$

1×3

macierz konstytutywna dla PSN:

wektor składowych naprężenia:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$3 \times 1 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 1$

$$[\sigma] = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$$

1×3

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}$$

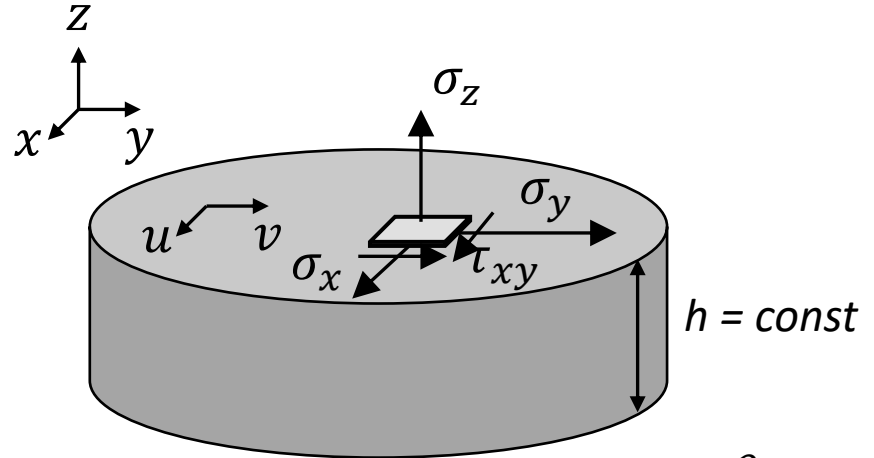
Płaski stan odkształcenia (nieskończenie długa rura, pryzma i wałek)

$$\sigma_x ; \sigma_y ; \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\tau_{xy} ; \tau_{yz} = 0 ; \tau_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_x ; \varepsilon_y ; \varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} ; \gamma_{yz} = 0 ; \gamma_{zx} = 0$$



wektor przemieszczenia:

$$[u] = [u, v]$$

1 × 2

wektor składowych odkształcenia:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]$$

1 × 3

wektor składowych naprężenia:

$$[\sigma] = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$$

1 × 3

$$\{\varepsilon\} = [R] \{u\}$$

3 × 1 3 × 2 2 × 1

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

3 × 1 3 × 3 3 × 1

macierz gradientu

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

macierz konstytutywna dla PSO:

$$[D] = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\nu) \end{bmatrix}$$

Osiowa symetria (bryła obrotowa)

$$\sigma_x ; \sigma_y ; \sigma_z$$

$$\tau_{xy} ; \tau_{yz} = 0 ; \tau_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_x ; \varepsilon_y ; \varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} ; \gamma_{yz} = 0 ; \gamma_{zx} = 0$$

wektor przemieszczenia: $[u] = [u, v]$
 1×2

wektor składowych odkształcenia:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}]$$

1×4

wektor składowych naprężenia:

$$[\sigma] = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}]$$

1×4

$$[D] = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 - \nu \end{bmatrix}$$

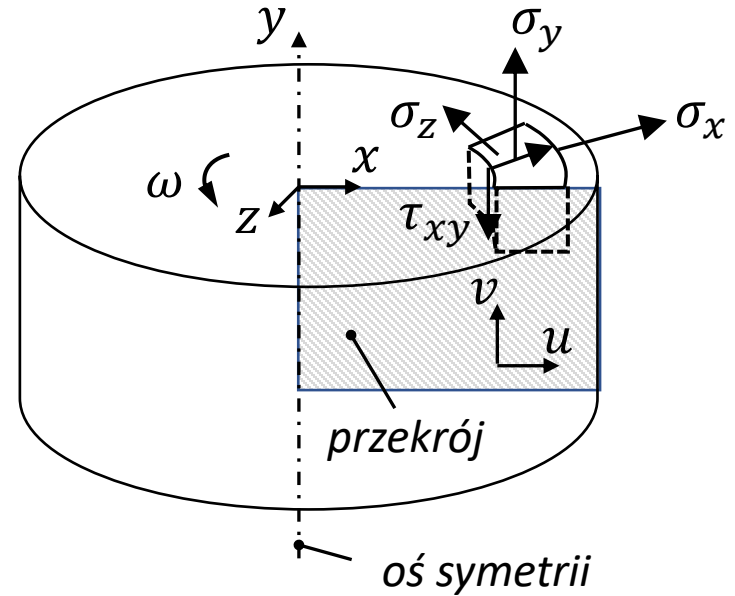
macierz konstytutywna dla osiowej symetrii

kierunki:

x – promieniowy

y – osiowy

z – obwodowy



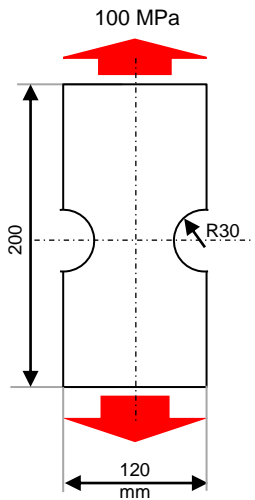
macierz gradientu:

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

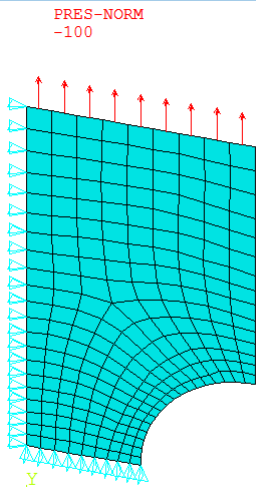
4×2

Przykład wykorzystania opcji elementów 2D

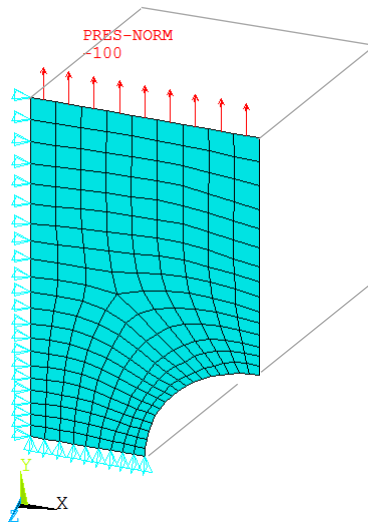
Płaski Stan Naprężenia



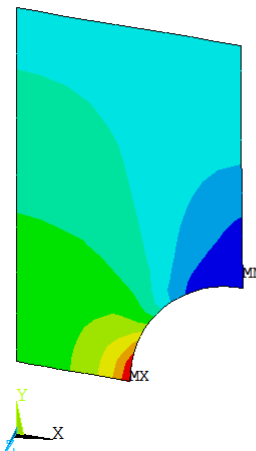
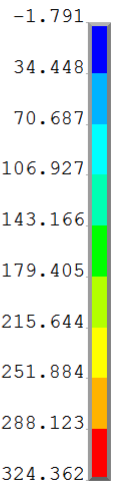
$E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
 $\nu = 0.3$



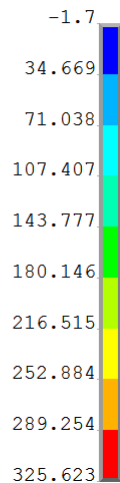
Płaski Stan Odkształcenia



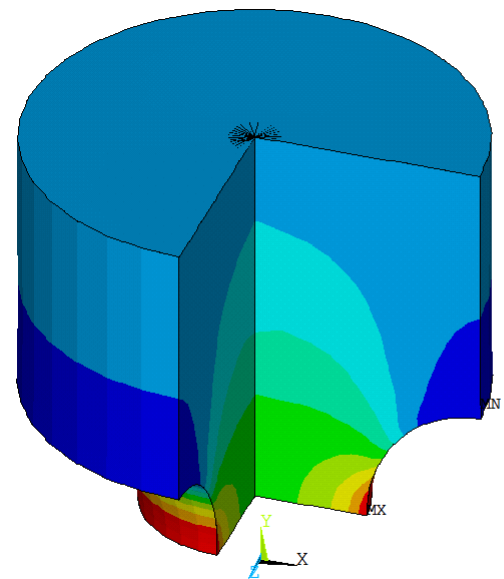
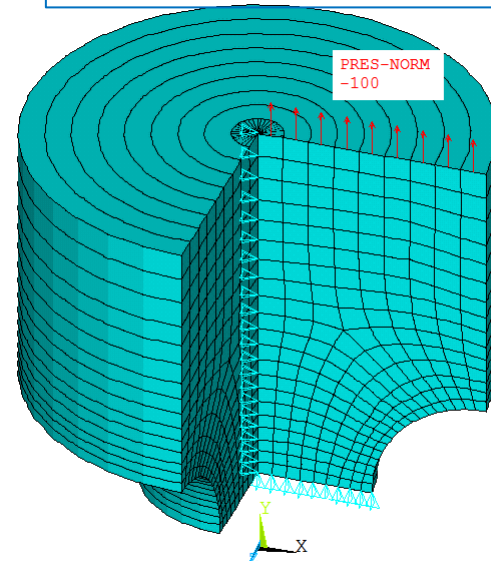
NODAL SOLUTION
SY
(AVG)



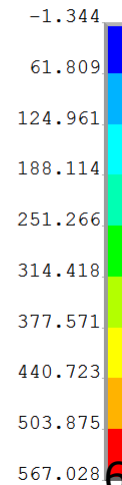
NODAL SOLUTION
SY
(AVG)



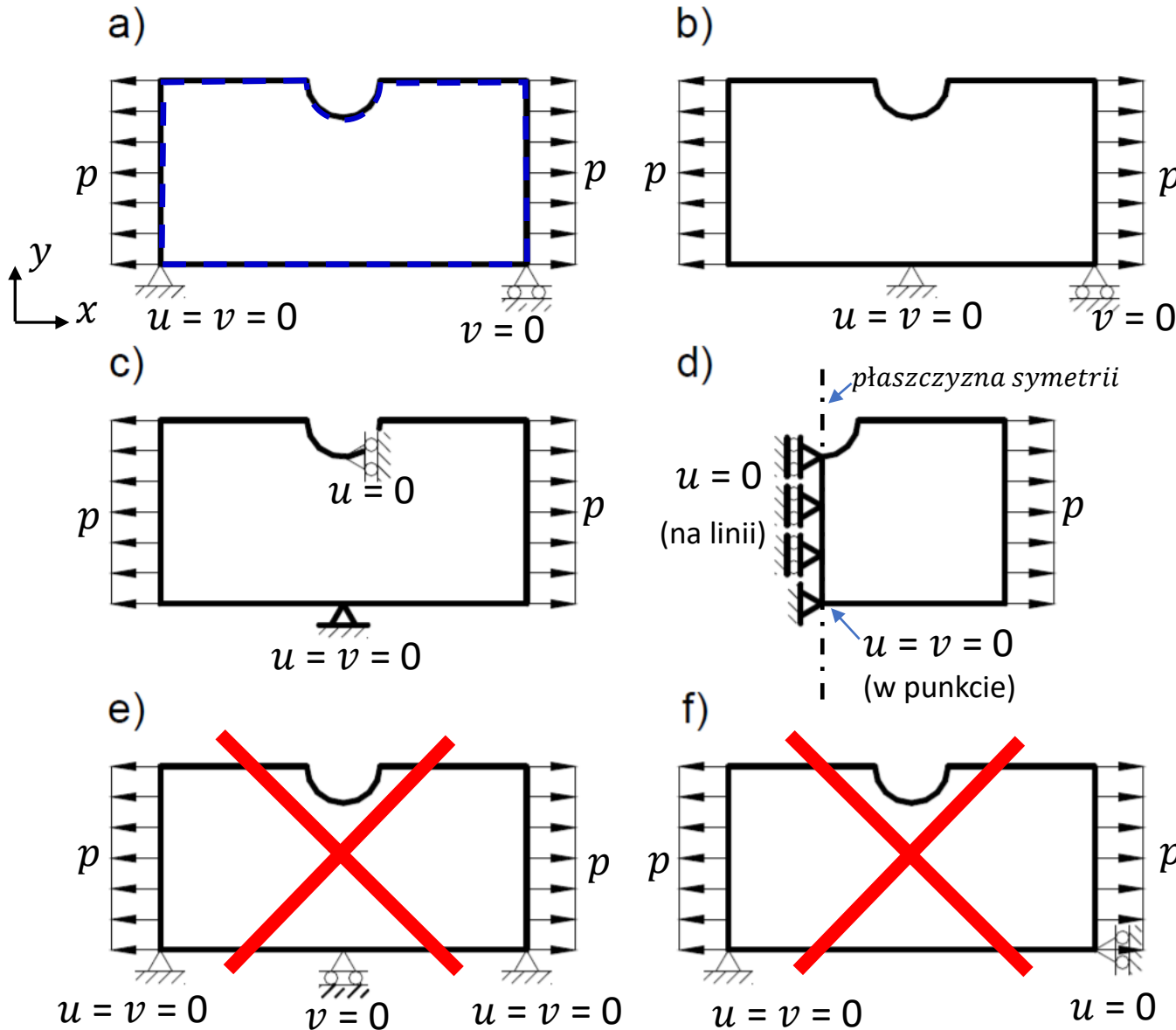
Osiowa symetria



NODAL SOLUTION
/EXPANDED
SY
(AVG)



Warunki podparcia 2D tarczy obciążonej samo-zrównoważonym układem sił

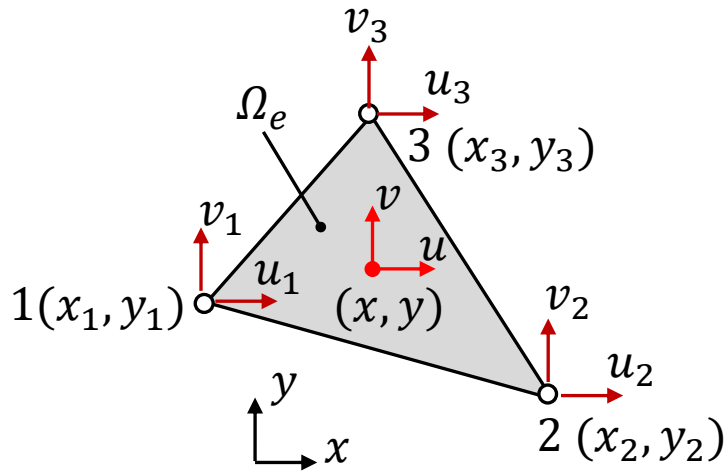


Nawet w przypadku obciążenia samozrównoważonego, niezbędne jest odebranie takiej liczby stopni swobody modelu, aby nie dopuścić do możliwości ruchu jako ciała sztywnego i jednocześnie nie ograniczać swobody deformacji. W przeciwnym wypadku macierz sztywności staje się macierzą osobliwą a rozwiązanie byłoby niejednoznaczne.

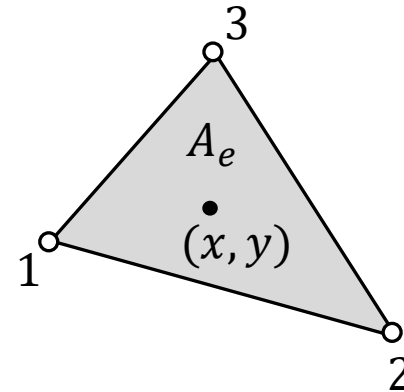
Poprawne podparcie:
 (ograniczony ruch bryły sztywnej i prawidłowa deformacja): a, b, c, d

Element trójkątny CST (constant strain triangle)

2D, 3-węzłowy trójkąt



$$n = 3 ; n_p = 2 \rightarrow n_e = n \cdot n_p = 6$$

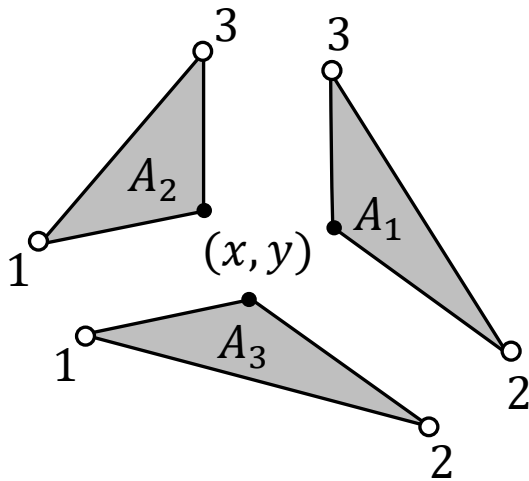


$$\int_{\Omega_e} d\Omega_e = A_e \cdot t_e$$

↑ pole ↑ ↓
grubość

Pole trójkąta o wierzchołkach 1,2,3:

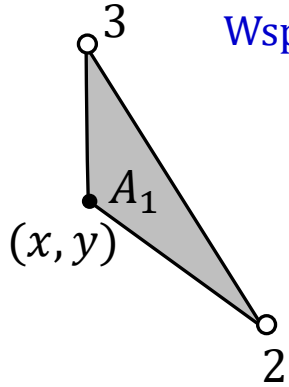
$$A_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}$$



$$A_e = A_1(x, y) + A_2(x, y) + A_3(x, y)$$

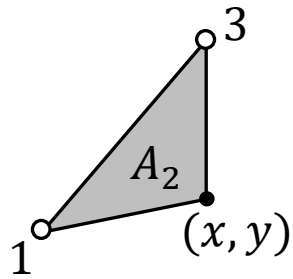
Element trójkątny CST

Współrzędne barycentryczne jako funkcje współrzędnych (x, y) :



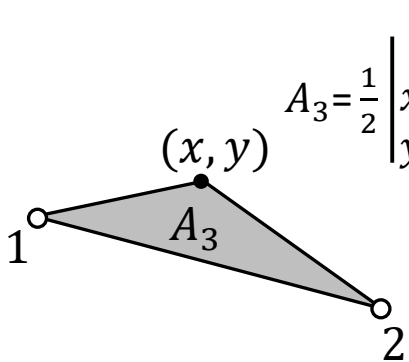
$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$L_1 = \frac{A_1}{A_e} = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{\overbrace{x_2 y_3 - x_3 y_2}^{a_1} + \underbrace{(y_2 - y_3)}_{b_1} x + \underbrace{(x_3 - x_2)}_{c_1} y}{2A}$$



$$A_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \end{vmatrix}$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A_e} = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \end{vmatrix} = \frac{\overbrace{x_3 y_1 - x_1 y_3}^{a_2} + \underbrace{(y_3 - y_1)}_{b_2} x + \underbrace{(x_1 - x_3)}_{c_2} y}{2A}$$



$$A_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix}$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A_e} = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix} = \frac{\overbrace{x_1 y_2 - x_2 y_1}^{a_3} + \underbrace{(y_1 - y_2)}_{b_3} x + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{c_3} y}{2A}$$

$$A_e = A_1(x, y) + A_2(x, y) + A_3(x, y)$$

$$1 = L_1(x, y) + L_2(x, y) + L_3(x, y)$$

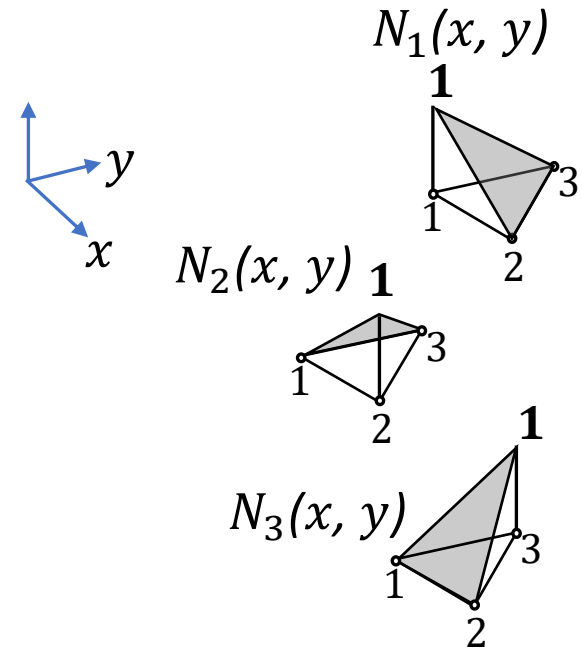
Funkcje kształtu elementu CST

funkcje kształtu = znormalizowane pola:

$$N_1(x, y) = L_1(x, y) = \frac{A_1(x, y)}{A_e} = \frac{1}{2A_e} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 x + \mathbf{c}_1 y)$$

$$N_2(x, y) = L_2(x, y) = \frac{A_2(x, y)}{A_e} = \frac{1}{2A_e} (\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 x + \mathbf{c}_2 y)$$

$$N_3(x, y) = L_3(x, y) = \frac{A_3(x, y)}{A_e} = \frac{1}{2A_e} (\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3 x + \mathbf{c}_3 y)$$



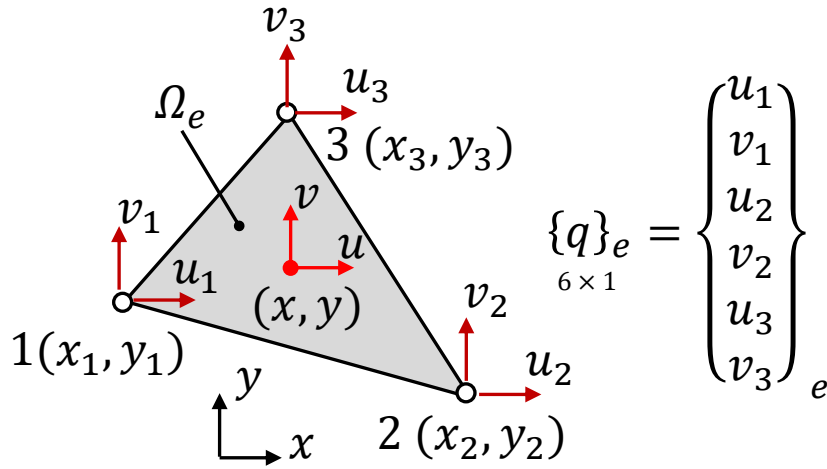
$$N_1(x, y) + N_2(x, y) + N_3(x, y) = 1$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 & ; & & \mathbf{a}_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 & ; & & \mathbf{a}_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ \mathbf{b}_1 &= y_2 - y_3 & ; & & \mathbf{b}_2 &= y_3 - y_1 & ; & & \mathbf{b}_3 &= y_1 - y_2 \\ \mathbf{c}_1 &= x_3 - x_2 & ; & & \mathbf{c}_2 &= x_1 - x_3 & ; & & \mathbf{c}_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

węzeł	$N_1(x, y)$	$N_2(x, y)$	$N_3(x, y)$
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

Odwzorowanie izoparametryczne w elemencie CST



Wektor funkcji kształtu:

$$[N(x, y)]_{1 \times 3} = [N_1(x, y), N_2(x, y), N_3(x, y)]$$

Wektory współrzędnych węzłowych:

$$\{x_i\}_e = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_{3 \times 1} \quad ; \quad \{y_i\}_e = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}_{3 \times 1}$$

Współrzędne dowolnego punktu wynikają z funkcji kształtu i współrzędnych węzłów:

$$x = [N(x, y)]_{1 \times 3} \{x_i\}_e = N_1(x, y)x_1 + N_2(x, y)x_2 + N_3(x, y)x_3$$

$$y = [N(x, y)]_{1 \times 3} \{y_i\}_e = N_1(x, y)y_1 + N_2(x, y)y_2 + N_3(x, y)y_3$$

przemieszczenia w punkcie wewnętrznym:

$$\{u(x, y)\}_{2 \times 1} = [N(x, y)]_{2 \times 6} \{q\}_e_{6 \times 1}$$

Odwzorowanie izoparametryczne

–te same funkcje użyte są do opisu geometrii i pola przemieszczeń

Macierz odkształcenie–przemieszczenie elementu CST

wektor składowych odkształcenia dla warunku PSN lub PSO:

$$\{\varepsilon\} = [R] \{u\} = [R] [N] \{q\}_e =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) \end{bmatrix} \{q\}_e =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \{q\}_e = [B] \{q\}_e$$

$$[B] = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \{\varepsilon\} = [B] \{q\}_e - \text{stałe odkształcenie}$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} - \text{stałe naprężenie}$$

CST – Constant Strain Triangle

Energia sprężysta w elemencie CST. Lokalna macierz sztywności

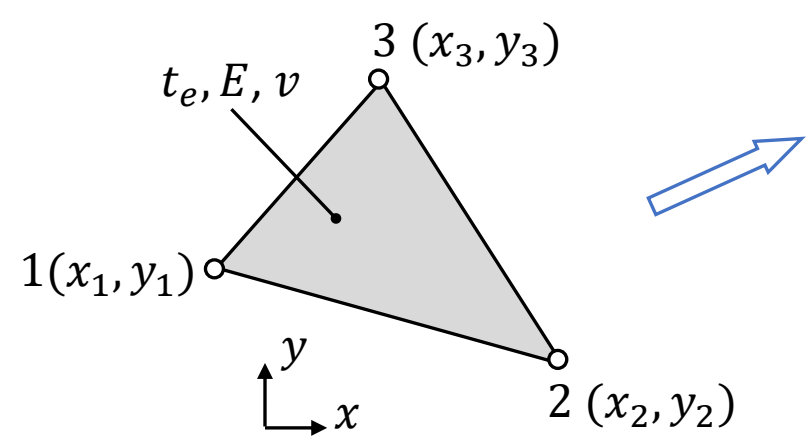
energia sprężysta w elemencie skończonym:

$$\begin{aligned}
 U_e &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} [\varepsilon] \{\sigma\} d\Omega_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \underset{1 \times 3}{[\varepsilon]} \underset{3 \times 1}{\{\sigma\}} d\Omega_e = \frac{1}{2} \underset{1 \times 6}{[q]_e} \underset{6 \times 3}{[B]^T} \underset{3 \times 3}{[D]} \underset{3 \times 6}{[B]} \underset{6 \times 1}{\{q\}_e} A_e t_e = \\
 &= \frac{1}{2} \underset{1 \times 3}{[q]_e} \underset{3 \times 3}{[k]_e} \underset{3 \times 1}{\{q\}_e}
 \end{aligned}$$

$\underset{3 \times 1}{\{\sigma\}} = \underset{3 \times 3}{[D]} \underset{3 \times 1}{\{\varepsilon\}}$
 $\underset{1 \times 3}{[\varepsilon]} = \underset{1 \times 6}{[q]_e} \underset{6 \times 3}{[B]^T}$ $\underset{3 \times 1}{\{\varepsilon\}} = \underset{3 \times 6}{[B]} \underset{6 \times 1}{\{q\}_e}$

lokalna macierz sztywności:

$$\underset{6 \times 6}{[k]_e} = A_e t_e \underset{6 \times 3}{[B]^T} \underset{3 \times 3}{[D]} \underset{3 \times 6}{[B]}$$



Energia potencjalna obciążenia w elemencie CST

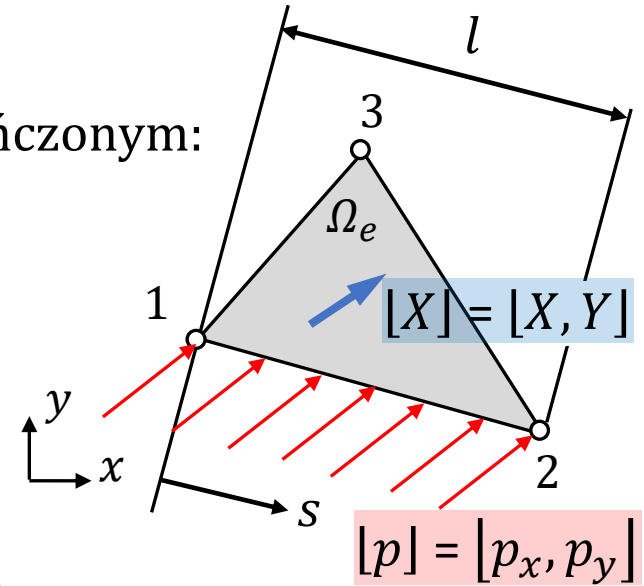
energia potencjalna obciążenia w elemencie skończonym:

$$W_e = \int_{\Omega_e} [X] \{u\} d\Omega_e + \int_{\Gamma_{pe}} [p] \{u\} d\Gamma_{pe} =$$

$$\{u\} = [N] \{q\}_e$$

$$= \int_{\Omega_e} [X][N] \{q\}_e d\Omega_e + \int_{\Gamma_{pe}} [p][N] \{q\}_e d\Gamma_{pe} =$$

$$= \left(\int_{\Omega_e} [X][N] d\Omega_e + \int_{\Gamma_{pe}} [p][N] d\Gamma_{pe} \right) \{q\}_e = ([F^X]_e + [F^p]_e) \{q\}_e = [F]_e \{q\}_e$$



równoważny wektor obciążenia od sił masowych:

$$[F^X]_e = t_e \int_{A_e} [X][N] dA_e$$

;

równoważny wektor obciążenia od obciążenia powierzchniowego:

$$[F^p]_e = t_e \int_0^l [p][N] ds$$

Składowe wektora obciążenia równoważnego w elemencie CST

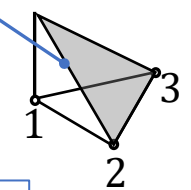
$$\boxed{[F^X]_e = t_e \int_{A_e} [X][N] dA_e} \quad ; \quad \boxed{[F^p]_e = t_e \int_0^l [p][N] ds}$$

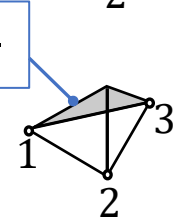
wektor obciążenia równoważnego od sił masowych:

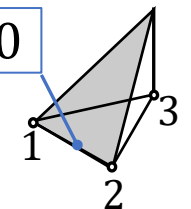
$$\begin{aligned} [F^X]_e &= t_e \int_{A_e} [X, Y] \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} dA_e = \\ &= t_e \int_{A_e} [XN_1, YN_1, XN_2, YN_2, XN_3, YN_3] dA_e = [F_{1e}^X, F_{2e}^X, F_{3e}^X, F_{4e}^X, F_{5e}^X, F_{6e}^X] \end{aligned}$$

wektor obciążenia równoważnego od sił powierzchniowych:

$$\begin{aligned} [F^p]_e &= t_e \int_0^l [p_x, p_y] \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} ds = \\ &= t_e \int_0^l [p_x, p_y] \begin{bmatrix} 1 - \frac{s}{l} & 0 & \frac{s}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{s}{l} & 0 & \frac{s}{l} & 0 & 0 \end{bmatrix} ds = \\ &= t_e \int_0^l \left[p_x \left(1 - \frac{s}{l}\right), p_y \left(1 - \frac{s}{l}\right), p_x \frac{s}{l}, p_y \frac{s}{l}, 0, 0 \right] ds = \\ &= [F_{1e}^p, F_{2e}^p, F_{3e}^p, F_{4e}^p, F_{5e}^p, F_{6e}^p] \end{aligned}$$

$$N_1(s)|_{1-2} = 1 - \frac{s}{l}$$


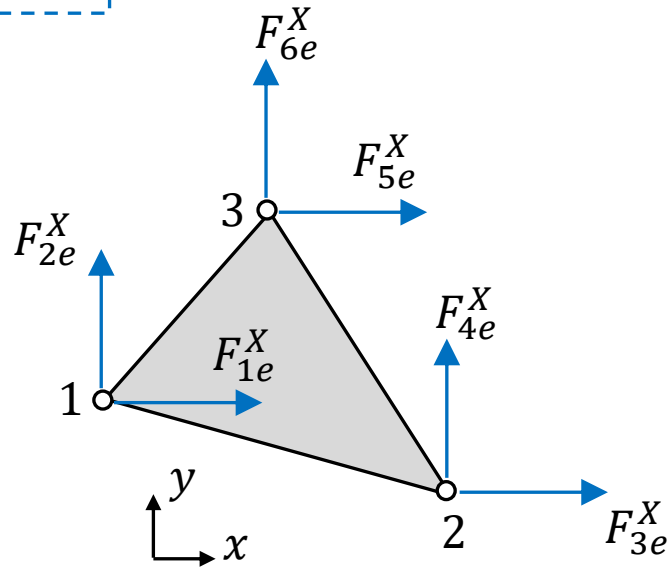
$$N_2(s)|_{1-2} = \frac{s}{l}$$


$$N_3(x, y)|_{1-2} = 0$$


Obciążenie kongruentne w elemencie CST

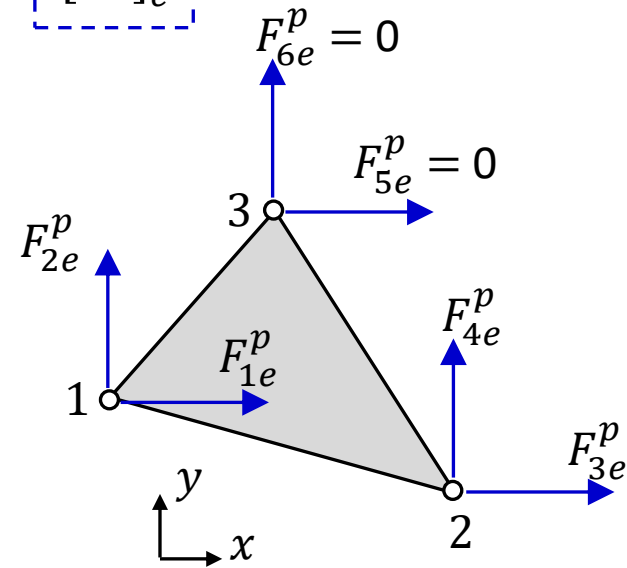
równoważny wektor obciążenia
od sił masowych:

$$[F^X]_e$$



równoważny wektor obciążenia
od obciążenia powierzchniowego:

$$[F^p]_e$$

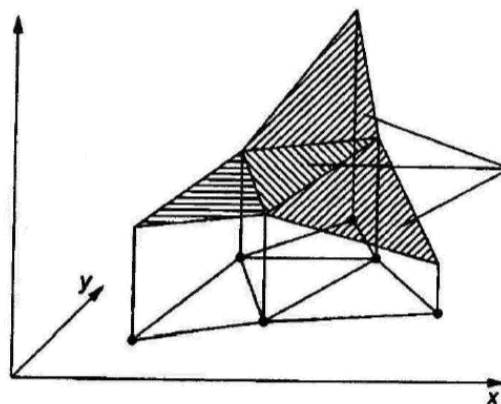


wektor obciążenia zastępczego (kongruentnego):

$$[F]_e = [F_{1e}^X + F_{1e}^p, F_{2e}^X + F_{2e}^p, F_{3e}^X + F_{3e}^p, F_{4e}^X + F_{4e}^p, F_{5e}^X + F_{5e}^p, F_{6e}^X + F_{6e}^p]$$

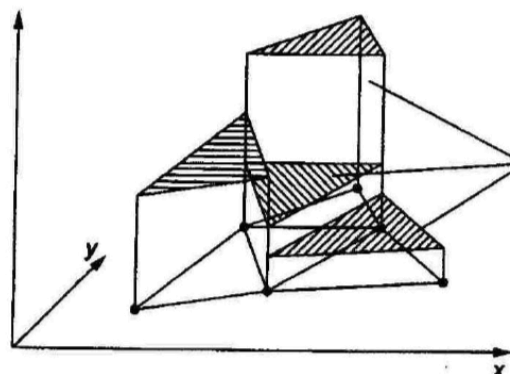
Wyniki w elemencie CST

DOF solution : $u(x, y), v(x, y)$



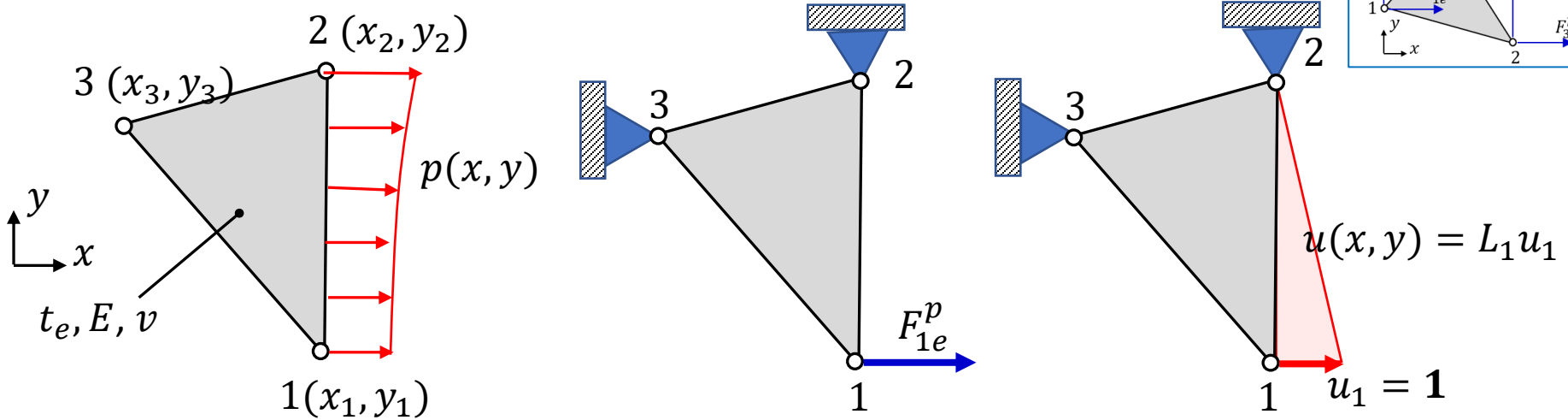
liniowe funkcje współrzędnych (x, y)

element solution: $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}$
 $3 \times 1 \quad 3 \times 1$



stałe

Przykład Wyznaczenie zastępczej siły w elemencie CST od sił powierzchniowych



równoważny wektor obciążenia od obciążenia powierzchniowego:

$$[F^p]_e = t_e \int_0^l [p][N] ds$$

Praca siły zastępczej F_{1e}^p na przemieszczeniu 1

praca obciążenia $p(x,y)$ na przemieszczeniu $u(x,y)$

$$F_{1e}^p \cdot 1 = t_e \int_0^l p(x,y) u(x,y) dy$$

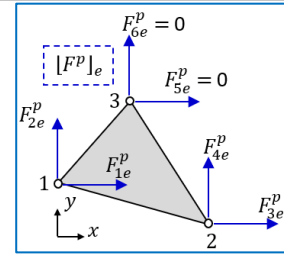
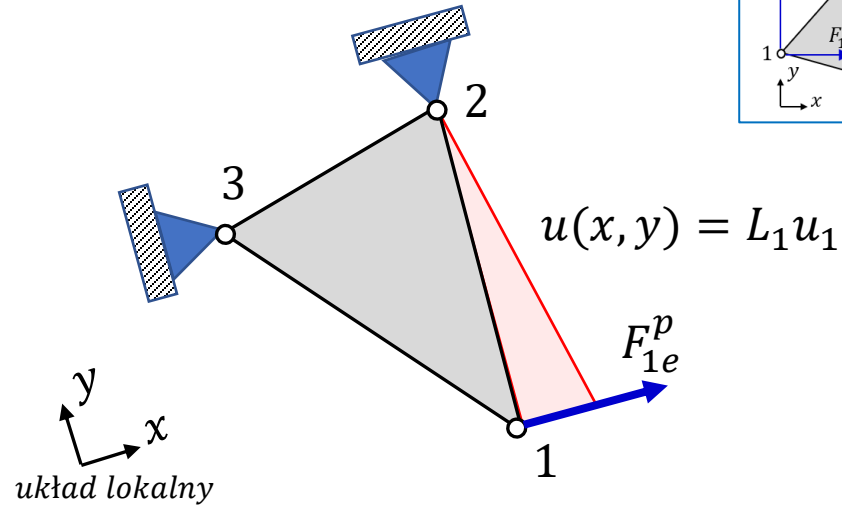
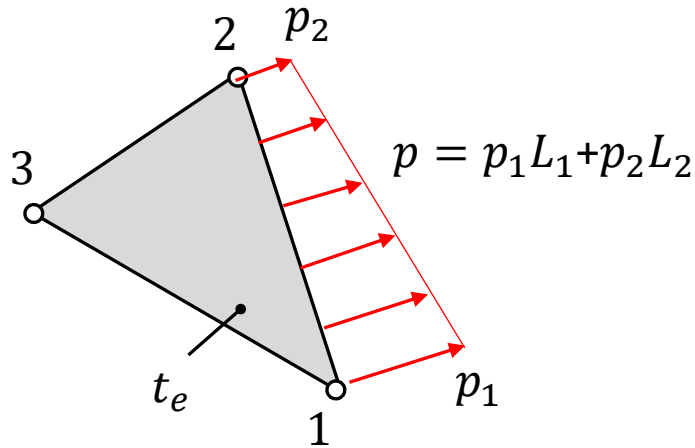
$$F_{1e}^p = t_e \int_0^l p(x,y) L_1 dy$$

Całki z funkcji barycentrycznych:

$$J_1 = \int_0^l L_1^q L_2^r dl = \frac{q!r!l}{(q+r+1)!}$$

$$J_2 = \int_{A_e} L_1^q L_2^r L_3^t dA_e = \frac{q!r!t!}{(q+r+t+2)!} 2A_e$$

Przykład Wyznaczenie zastępczej siły w elemencie CST od sił powierzchniowych



Praca siły zastępczej F_{1e}^p na przemieszczeniu 1 praca obciążenia $p(x, y)$ na przemieszczeniu $u(x, y)$

$$F_{1e}^p \cdot 1 = t_e \int_0^l p(x, y) u(x, y) dy \longrightarrow F_{1e}^p = t_e \int_0^l (p_1 L_1 + p_2 L_2) L_1 dy$$

$$F_{1e}^p = t_e (p_1 \int_0^l L_1^2 dy + p_2 \int_0^l L_1 L_2 dy) = t_e (p_1 \frac{2!0!l}{(2+0+1)!} + p_2 \frac{1!1!l}{(1+1+1)!}) = t_e (\frac{1}{3} p_1 l + \frac{1}{6} p_2 l)$$

Całka z funkcji barycentrycznych:

$$J_1 = \int_0^l L_1^q L_2^r dl = \frac{q!r!l}{(q+r+1)!}$$

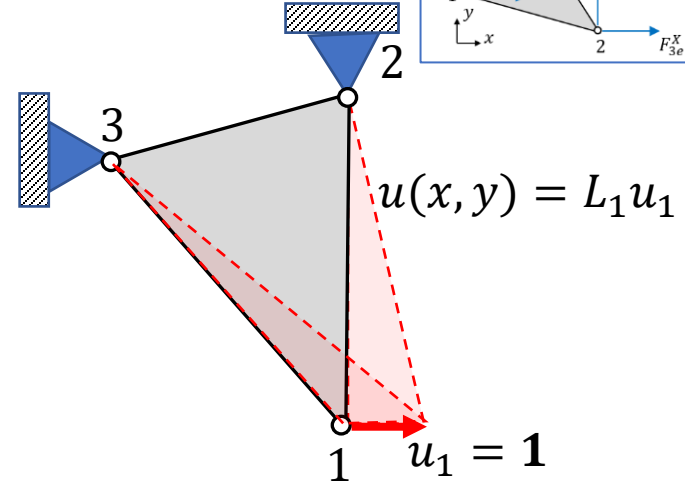
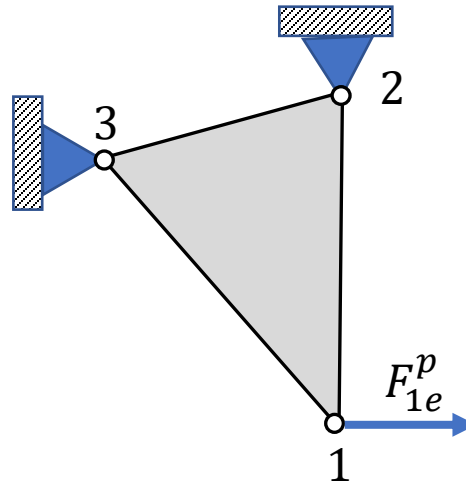
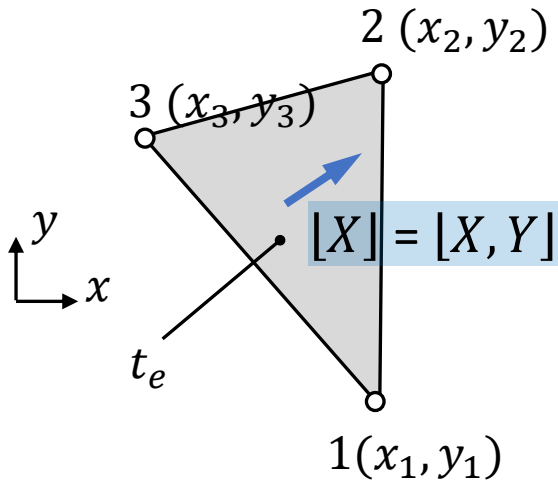
Dla $p_1 = p_2$ mamy:

$$F_{1e}^p = t_e \int_0^l p L_1 dy = t_e p \frac{1!0!l}{(1+0+1)!} = \frac{p l}{2} t_e$$

Dla $p_2 = 0$ mamy:

$$F_{1e}^p = t_e \int_0^l p_1 L_1^2 dy = t_e p_1 \frac{2!0!l}{(2+0+1)!} = \frac{p_1 l}{3} t_e$$

Przykład Wyznaczenie zastępczej siły w elemencie CST od sił masowych



równoważny wektor obciążenia od obciążenia masowego:

$$[F^X]_e = t_e \int_{A_e} [X][N] dA_e$$

Praca siły zastępczej F_{1e}^X na przemieszczeniu 1

pracy obciążenia X na przemieszczeniu $u(x, y)$

$$F_{1e}^X \cdot 1 = t_e \int_{A_e} X u(x, y) dA_e$$

$$F_{2e}^X \cdot 1 = t_e \int_{A_e} Y v(x, y) dA_e$$

$$F_{1e}^X = t_e \int_{A_e} X L_1 dA_e$$

$$F_{2e}^X = t_e \int_{A_e} Y L_1 dA_e$$

Całki z funkcji barycentrycznych:

$$J_2 = \int_{A_e} L_1^q L_2^r L_3^t dA_e = \frac{q!r!t!}{(q+r+t+2)!} 2A_e$$

Dla $X = const$ i $Y = 0$ mamy:

$$F_{1e}^X = t_e X \int_{A_e} L_1 dA_e = t_e X \frac{1!0!0!}{(1+0+0+2)!} 2A_e = X \frac{A_e t_e}{3}$$

$$F_{2e}^X = 0$$